

APPROCHE D'UNE NOUVELLE METHODE D'IDENTIFICATION DES RIGIDITES DE FLEXION DE POUTRE A INERTIE EVOLUTIVE

TOUKOUROU C. et VIANOU A.

Groupe de Rhéologie des Matériaux, Laboratoire d'Etudes et de Recherches en Techniques Industrielles,
Collège Polytechnique Universitaire, Université Nationale du Bénin,
B.P. 2009, Cotonou (Bénin)

(Reçu le 23 mai 1995, Révisé le 23 mai 1996, Accepté le 04 décembre 1997)

SUME

Cet article présente une méthode d'identification des rigidités de flexion de poutre à inertie variable basée sur le principe des travaux virtuels avec l'utilisation des champs Bernoulli. Nous présentons une formulation globale du problème d'identification ainsi que l'établissement des équations permettant d'identifier les inconnues qui sont les rigidités de flexion.
Mots clés : Poutre, inertie évolutive, rigidité de flexion, identification mécanique, simulation numérique, programme d'identification.

ABSTRACT

This paper presents a method which can be used to identify the bending stiffness of the beams with variable inertia. This method is based on the principle of virtual work with the use of special fields. The application of this principle was carried out with referring to the hypothesis of Bernoulli. Also we present in this paper a global formulation of the problem of the identification as well as that the establishment of the equations which permit to identify the unknowns.
Key words : Beam, variable inertia, bending stiffness, mechanical identification, identification program.

INTRODUCTION

Les poutres à inerties variables sont conceptuellement des structures optimisées dans le sens où l'objectif est de proposer un modèle de poutre répondant à un cahier des charges pour un type de sollicitation donné la structure.

Il est clair que le problème se pose avec d'autant plus d'acuité que la structure est une structure à haute performance (type aéronautique par exemple, éléments de machine ou élément de charpente en génie civil etc...) et que les matériaux mis en oeuvre sont des matériaux performants, coûteux se prêtant eux-mêmes à une certaine optimisation. L'optimisation de ces types de structure comme les poutres à inertie variable passe évidemment par l'identification de leurs propriétés structurales qui intègrent à la fois les propriétés matérielles et la géométrie de la section droite, donc il est important d'élaborer une procédure

de contrôle direct des propriétés dimensionnantes c'est l'objectif de ce travail.

A partir d'une certaine connaissance de la structure à identifier, connaissance qui peut être partielle, une poutre modèle est définie : plusieurs choix sont possibles, par exemple poutre à inerties constantes par morceaux, ou inerties linéaires continues, et le nombre de tronçons de la poutre.

Ensuite il faut examiner très soigneusement l'aspect expérimental et les grandeurs qui constituent la connaissance que nous avons du comportement de la poutre réelle dans une configuration d'essai donnée (réponse mécanique de la structure) à savoir les déplacements ou les déformations qui sont mesurées en un certain nombre de points.

Le calcul conduit à des valeurs identifiées, à partir de l'utilisation du principe des travaux virtuels et de la construction des champs virtuels spéciaux offrant la

possibilité d'une identification locale avec certains types de champs, l'intérêt de cette identification locale par rapport à l'identification globale est qu'elle ne nécessite que la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Finalement il faut pouvoir comparer les différentes identifications, c'est-à-dire avoir des éléments de comparaison sur chaque identification à partir des normes que nous avons définies ceci permet de formuler des critiques sur telle ou telle identification.

Connaissant la réponse mécanique de la poutre réelle dans une configuration d'essai, le problème est de trouver une poutre modèle ayant la même réponse mécanique que la poutre réelle dans la même configuration d'essai, cette condition permet d'identifier les rigidités de la poutre modèle. La résolution du problème revient à déterminer (D_1 ,

D_2, \dots, D_n) dans le cas où la rigidité est constante par tronçon et ($D_0, D_1, D_2, \dots, D_n, D_{n+1}$) dans le cas où elle est linéairement variable.

1. Rappels sur le principe des travaux virtuel appliqués à la théorie des poutres

Pour une poutre homogène à section constante, la théorie des petites perturbations et dans le cadre de la théorie de Bernoulli, une loi de comportement élastique linéaire en flexion est donnée par la relation moment de flexion-courbure [1] :

$$M_x = -D \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$$

où D est la rigidité en flexion de la poutre et $\frac{d^2 w(x)}{dx^2}$ la courbure.

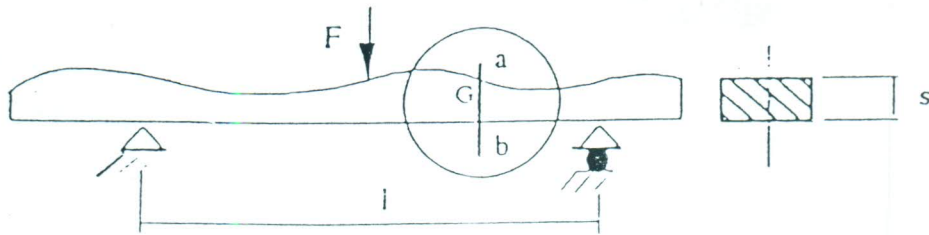


Figure 1 : Poutre droite chargée dans son plan.
G : centre de gravité de la section droite a-b de la poutre

Le principe des travaux virtuels, appliqué à une poutre chargée perpendiculairement à son plan moyen conformément à la figure 1 conduit à l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^p F_i w_i^* = \int_0^l D(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w^*(x)}{dx^2} dx$$

$$\sum_{i=1}^p F_i w_i^* = \int_V E(x) y^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w^*(x)}{dx^2} dv \quad (1)$$

$$= \int_0^l \left[\int_A y^2 E(x) ds \right] \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w^*(x)}{dx^2} dx \quad (2)$$

où les quantités $D(x)$ représentent la rigidité en flexion de la poutre réelle au point x , w est le champ déplacement réel, w^* est le champ virtuel que l'on choisit indépendamment du champ réel, $F_i w_i^*$ est le travail virtuel de la force réelle F_i à l'abscisse i pour le déplacement virtuel de w_i^* .

Cette égalité est vérifiée quel que soit le déplacement virtuel cinématiquement admissible.

2. Application des rigidités d'une poutre

L'égalité que nous venons d'établir (3) est écrite pour la poutre réelle que l'on cherche à identifier. N

En posant $\int_A y^2 E(x) ds = D(x)$ nous aurons

approche d'une nouvelle méthode d'identification des rigidités de flexion de poutre à inertie évolutive.

ons considérer $D(x)$ comme une fonction
ue dans l'équation en supposant que les autres
s de l'égalité sont connus.

andeur $D(x)$ peut être constante par tronçon ou

variable suivant l'axe Ox . Lorsqu'on se place dans le
second cas, on peut procéder à une détermination
locale de la rigidité.

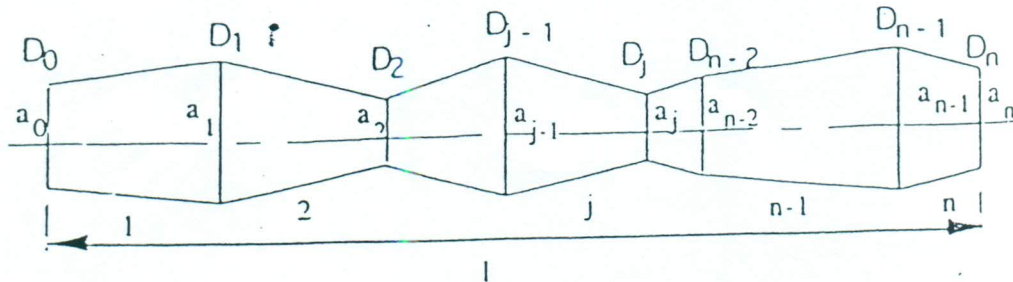


Figure II : Poutre modèle retenue à inertie variable

ons pour poutre modèle une poutre à n tronçons
ure 2) sur chacun desquels la rigidité est
éptible d'évoluer. Nous pouvons écrire l'égalité
ante (1) en posant :

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = K(x)$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{d^2 x^*(x)}{dx^2} D(x) dx$$

$$\sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K(x) D(x) dx \quad (4)$$

ic $a_0 = 0$, $a_n = 1$, 1 étant la longueur de la poutre.

fonction $D(x)$ étant linéaire quel que soit $[a_{j-1}, a_j]$
s pouvons adopter les notations suivantes :

$$D(x) = \frac{D_j - D_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} (x - a_{j-1}) + D_{j-1} \quad \text{sur l'intervalle } [a_{j-1}, a_j]$$

D_j, D_{j-1} sont maintenant les rigidités en flexion de
poutre modèle aux points a_j et a_{j-1} respectivement.

ors l'équation (4) peut s'écrire sous cette forme :

$$\sum_{i=1}^p F_i w_i^* = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K(x) \left[\frac{D_j - D_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} (x - a_{j-1}) + D_{j-1} \right] M_i dx \quad (5)$$

où n est le nombre total de tronçons.

Dans la configuration d'essai que nous avons choisie
les efforts extérieurs sont réduits à la force F
appliquée au point d'abscisse i . L'équation précédente
devient :

$$F_i w_i^* = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K(x) \left[\frac{D_j - D_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} (x - a_{j-1}) + D_{j-1} \right] dx \quad (6)$$

Dans le second membre de l'équation (6), nous avons
les D_j qui sont les $n+1$ inconnues à identifier,
permettant ainsi de déterminer la rigidité aux
extrémités de chaque tronçon de la poutre et par suite
de conduire à l'évolution de la rigidité en flexion de la
poutre modèle.

3. Choix des champs virtuels

L'égalité précédente étant vérifiée quel que soit w^*
cinématiquement admissible, on peut choisir $n+1$
champs virtuels ce qui nous permet d'établir un

système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Le système se présente sous la forme suivante :

$$F_i w_0^*(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K_j(x) \left[\frac{D_j - D_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} (x - a_{j-1}) + D_{j-1} \right] dx$$

$$F_i w_k^*(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K_j(x) \left[\frac{D_j - D_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} (x - a_{j-1}) + D_{j-1} \right] dx \quad (7)$$

$$F_i w_n^*(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K_j(x) \left[\frac{D_j - D_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} (x - a_{j-1}) + D_{j-1} \right] dx$$

où $K_k(x) = \frac{d^2 w_k(x)}{dx^2}$ et $w_k^*(x)$ est le déplacement virtuel du point d'application (x_i) de F_i dans le champ virtuel w_k^* ($k = 0, \dots, n$)

L'application du principe des travaux virtuels repose sur un choix judicieux des champs virtuels vérifiant les conditions limites en déplacement. Donc un critère de choix s'impose afin de retenir ceux qui nous apparaissent commodes en vue de l'identification [3].

Champs virtuels utilisés

Ce sont des champs paramétrés qui ont la particularité d'être deux fois continûment dérivables sur toute la longueur de la poutre. Ce sont des arcs de polynôme raccordés à leurs extrémités à des droites Figure 3.

Soient : une poutre de longueur L , le champ virtuel un segment $[a, b] \in [0, L]$ avec $a < b$

Pour un polynôme de degré 4 nous avons :

$$x \in [0, a]; \text{ pour } w^* = x \left[\frac{a^3}{6} - \frac{b a^2}{2} + d \right]$$

$$x \in [a, b]; \text{ pour } w^* = \frac{x^4}{12} + x^3 \frac{a+b}{6} - x^2 \frac{a b}{2} + d x + c$$

$$x \in [b, L]; \text{ pour } w^* = (x-b) \left[\frac{b^3}{6} - \frac{a b^2}{2} + d \right]$$

avec $c = a^3 \frac{a-2b}{12}$ et $d = b^3 \frac{b-2a}{12} - b^2 \frac{b-3a}{6} - \frac{c}{L}$

La double continuité et dérivabilité de ces champs virtuels a été vérifiée ainsi que les conditions limites en déplacement.

- Identification globale

Quant aux champs utilisés, une fois que le modèle est choisi (Figure 2) les $n+1$ champs cinématiquement admissibles sont déterminés à partir des supports $]a, b[$ variables représentant les bornes de chaque tronçon et le $n+1$ ème champ est celui dont le support est $]0, L[$ (Figure 3, Figure 4). Les champs sont les suivants :

- le support du champ $k, k \leq n$ est $]a_{k-1}, a_k[$,
- le support du champ $n+1$ est $]0, L[$.

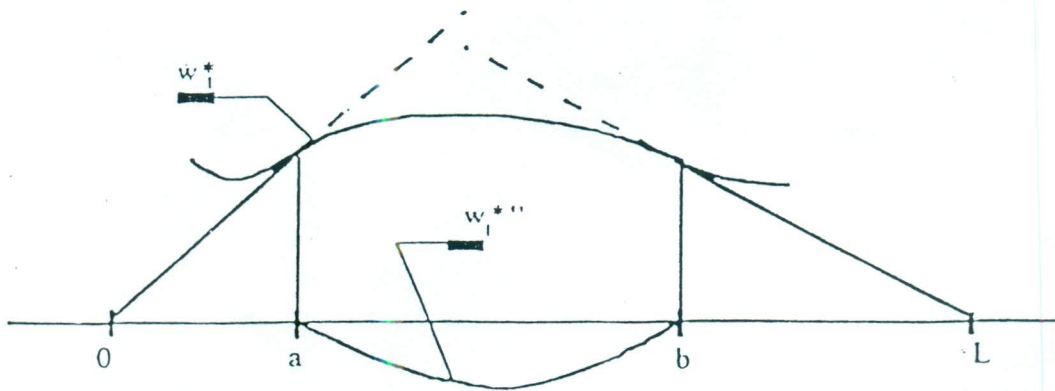


Figure III : Champs virtuels à courbure nulle sur certains tronçons

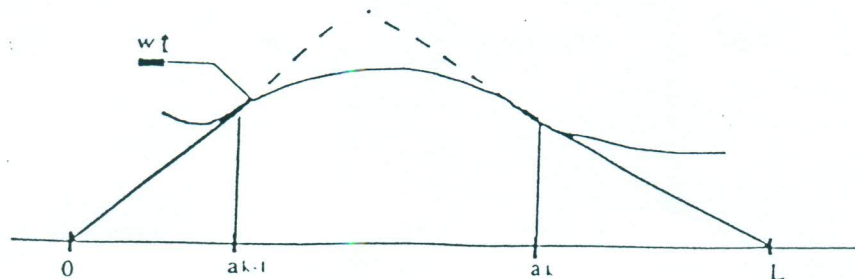


Figure IV : N premiers champs utilisés pour l'identification globale

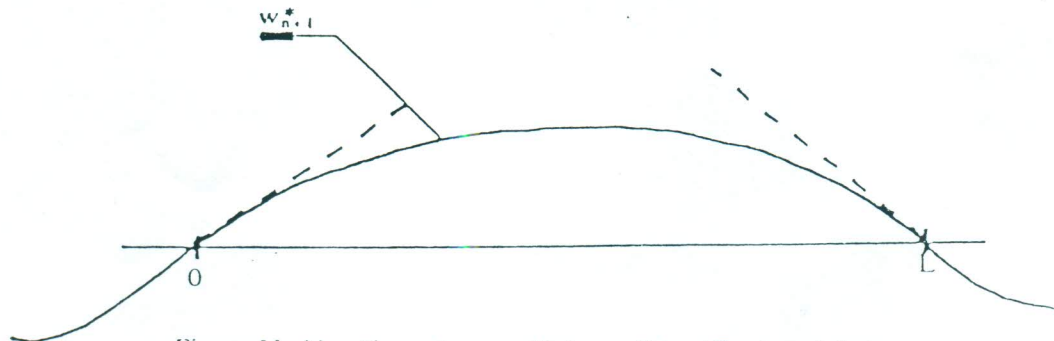


Figure V : N + 1ème champ utilisé pour l'identification globale

Avec les $n+1$ champs nous établissons le système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Après résolution, nous obtenons les $n+1$ rigidités du modèle en tronçons ; il faut noter enfin que les n tronçons peuvent être tout aussi bien égaux qu'inégaux, et que ces $n+1$ champs doivent également vérifier les hypothèses de bases (champs cinématiquement admissibles).

Avec les $n+1$ champs nous avons le système d'équations suivant :

$$F_1 w_0^*(x_1) = \int_0^{a_1} K_0(x) \left[\frac{D_1 - D_0}{a_1 - a_0} x + D_0 \right] dx$$

$$F_1 w_1^*(x_1) = \int_{a_1}^{a_2} K_1(x) \left[\frac{D_2 - D_1}{a_2 - a_1} (x - a_1) + D_1 \right] dx$$

$$F_1 w_k^*(x) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} K_k(x) \left[\frac{D_k - D_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} (x - a_{k-1}) + D_{k-1} \right] dx$$

pour le champ à courbure non nulle sur intervalle $[a_{k-1}, a_k]$.

$$F_1 w_k^*(x_1) = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} K_j(x) \left[\frac{D_{j+1} - D_j}{a_{j+1} - a_j} (x - a_j) + D_j \right] dx$$

(pour le champ à courbure non nulle sur intervalle $[0, L]$)

$$\text{avec } k_k(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w_k^*(x)}{dx^2}$$

- Identification locale

L'identification locale consiste à identifier sur un domaine $]a, b[$ quelconque de la poutre, c'est-à-dire finalement à identifier seulement les deux rigidités des points a et b en une résolution. La partition de la poutre en plusieurs domaines permet à l'opérateur d'identifier l'ensemble des rigidités pas à pas.

- Champs utilisés

Pour l'identification locale, nous n'avons besoin que de deux champs virtuels. Il faut que les 2 champs

soient de même support $]a, b[$ (figure 6) ; il suffit de prendre des polynômes de degrés différents (polynômes de degré 4 et 5) et faire varier le support $]a, b[$ pour chaque identification. Nous donnons ci-dessous l'expression des deux polynômes principaux.

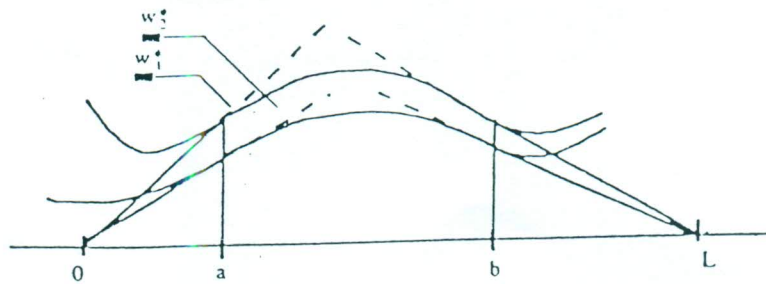


Figure VI : Champs utilisés dans le cas d'une identification locale

$$x \in [a, b] \quad w_1^* = \frac{x^4}{12} + x^3 \frac{a+b}{6} - x^2 \frac{ab}{2} + dx + c$$

$$x \in [a, b] \quad w_2^* = \frac{x^5}{20} + x^4 \frac{a+b}{12} - x^3 \frac{ab}{2} + d_1 x + c_1$$

Les constantes c, d, d_1, c_1 sont fonction de a et b , et sont déterminés à partir des mêmes hypothèses que celles posées pour le champ virtuel utilisé pour l'identification globale.

Pour un modèle à n tronçons (Figure 2) nous allons déplacer le support $]a, b[$ sur chaque tronçon pour finalement identifier l'ensemble des rigidités de la poutre. Avec ces 2 champs nous pouvons établir un système de 2 équations à 2 inconnues nous permettant ainsi d'identifier les deux rigidités aux extrémités a et b .

Le système d'équations est le suivant :

$$\begin{cases} F \quad W_{11}^* = \int_a^b K_1(x) \left[\frac{D_b - D_a}{b-a} (x-a) + D_b \right] dx \\ F \quad W_{12}^* = \int_a^b K_2(x) \left[\frac{D_b - D_a}{b-a} (x-a) + D_b \right] dx \end{cases}$$

avec

$$K_1 = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w_1^*(x)}{dx^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{d^2 w_2^*(x)}{dx^2}$$

En chaque point du découpage il y a deux estimations de la rigidité de flexion, ces deux rigidités étant en principes proches l'une de l'autre, nous convenons de prendre leur demi-somme comme estimation finale de la rigidité en un point.

L'identification locale offre plus de précision que l'identification globale par le simple fait que nous avons un système d'équations à 2 inconnues contre $n+1$ pour l'identification globale. Certes, le nombre d'inconnues au total est identique dans les deux cas, mais la résolution ne porte que sur deux équations à la fois. On limiterait ainsi les phénomènes d'instabilité et on accroît la précision.

4. Mode d'évaluation des résultats

Après l'identification des rigidités du modèle choisi, il est indispensable d'évaluer les résultats d'identification, c'est-à-dire de disposer d'éléments de comparaison entre la poutre réelle et le modèle identifié. Ceci peut s'opérer de plusieurs façons :

comparaison visuelle de l'évolution des rigidités réelles et identifiées lors des différents tests de validation de la méthode par la simulation numérique ; ceci exige bien sûr de connaître les rigidités réelles.

proche d'une nouvelle méthode d'identification des rigidités de flexion de poutre à inertie évolutive.

ut définir des normes permettant de comparer le identifié et la poutre réelle : l'écart maximal es flèches des deux déformées au même e N_1 et l'aire délimitée par la déformée de la réelle et celle de la poutre modèle toujours même configuration d'essai N_2 :

$$\max |f_r - f_i|$$

f_r : flèche poutre réelle
 f_i : flèche poutre identifiée

$$\sum_{j=0}^{61} \frac{1}{60} (y_{jr} - y_{ji})^2$$

éformée de la poutre réelle

éformée de la poutre identifiée

Nous relevons les écarts sur une soixantaine de points équidistants le long de la poutre. L'utilisation de ces normes pourrait être considérée comme une aide au choix du modèle idéal le plus proche de la poutre réelle. Les simulations numériques ont cherché à fonder la légitimité de ces deux normes.

5. Simulation

Dans l'exemple que nous proposons de traiter, nous allons utiliser la réponse mécanique d'une poutre dont les caractéristiques sont données (figures 7 et 8) dans une configuration d'essai, et proposer à l'identification des rigidités de trois modèles de poutre par la méthode que nous avons proposée.

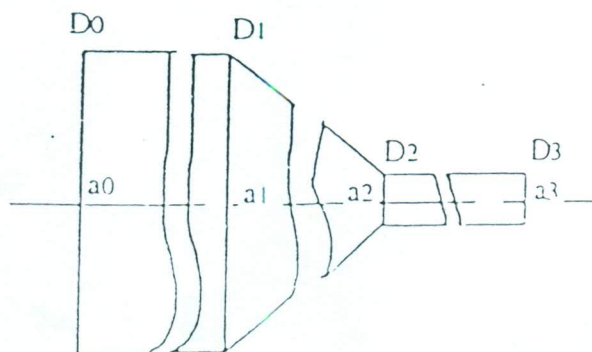


Figure VII : Type de poutre utilisée pour le test de simulation

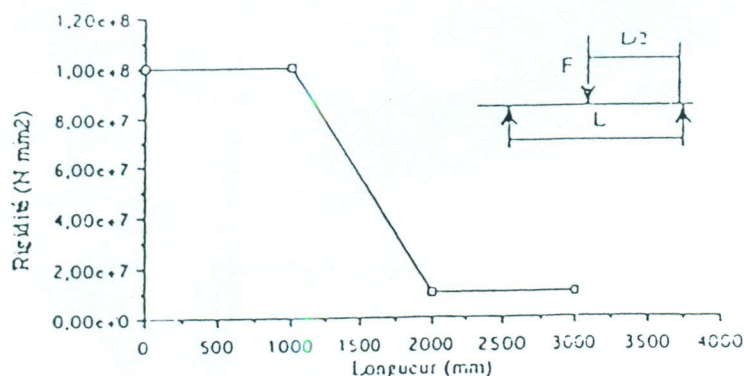


Figure VIII : Evolution des rigidités de la poutre réelle et conditions d'essai

511

= 3000 mm

= $1 \cdot 10^8 \text{ Nmm}^2$, $a_0 = 0 \text{ mm}$

= $1 \cdot 10^8 \text{ Nmm}^2$, $a_1 = 1000 \text{ mm}$

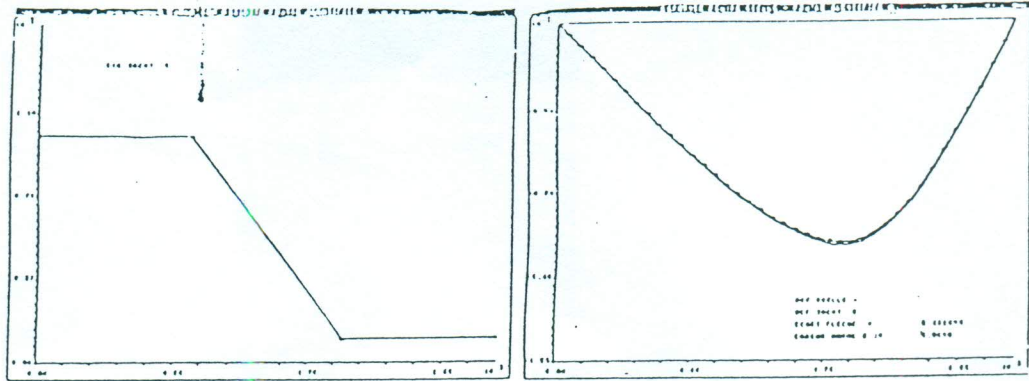
= $1 \cdot 10^7 \text{ Nmm}^2$, $a_2 = 2000 \text{ mm}$

= $1 \cdot 10^7 \text{ Nmm}^2$, $a_3 = 3000 \text{ mm}$

Le modèle choisi comporte trois évolutions :

- de 0 à 1000 mm nous avons une rigidité constante
- de 1000 mm à 2000 mm nous avons une rigidité linéaire
- de 2000 mm à 3000 mm nous avons une rigidité constante
- Résultats de la simulation

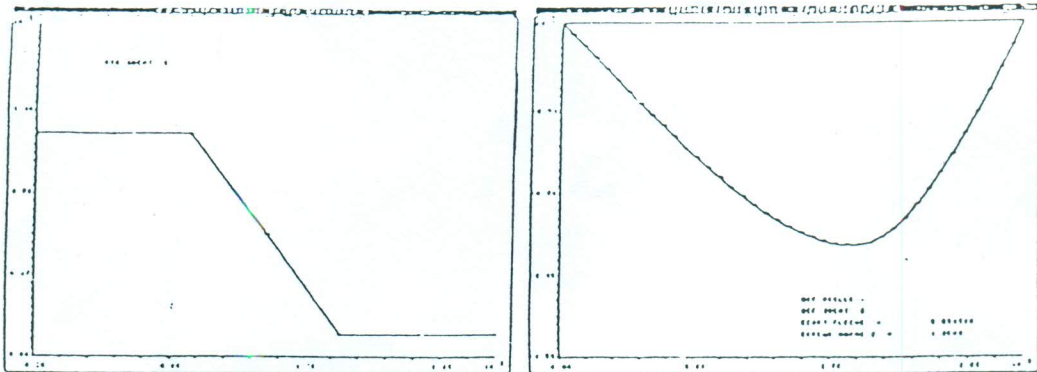
Cas d'un modèle à 3 tronçons



Echelle OX : 10^3 mm, OY : 10^8 Nmm²
Figure IX : Evolution de la rigidité (modèle 1)

Echelle OX : 10^3 mm OY : 10^8 Nmm²
Figure X : Déformées poutre réelle-modèle identifi

Cas d'un modèle à 6 tronçons

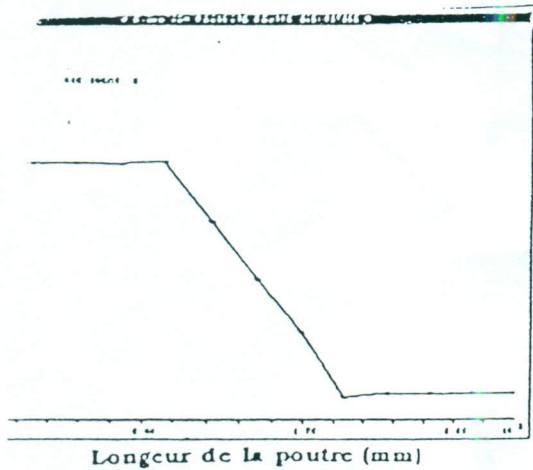


Echelle OX : 10^3 mm, OY : 10^8 Nmm²
Figure XI : Evolution de la rigidité (modèle 2)

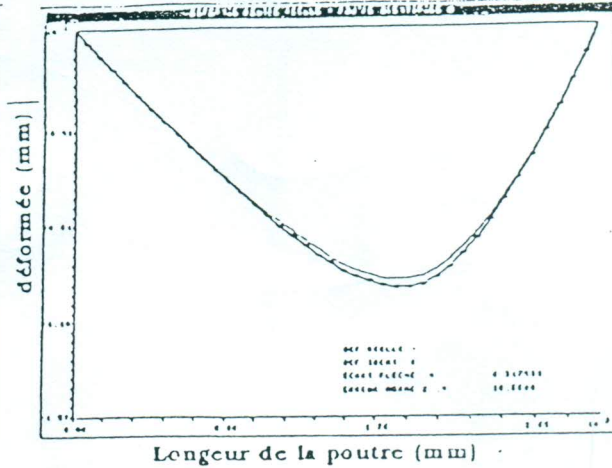
Echelle OX : 10^3 mm, OY : 10^8 Nmm²
Figure XII : Déformées poutre réelle-modèle ident

sché d'une nouvelle méthode d'identification des rigidités de flexion de poutre à inertie évolutive.

modèle à 12 tronçons



Echelle OX : 10^3 mm, OY : 10^8 Nmm²
Figure XIII : Evolution de la rigidité (modèle 3)



Echelle OX : 10^3 mm, OY : 10^8 Nmm²
Figure XIV : Déformées poutre réelle-modèle identifié

En outre, les premiers résultats montrent que la variation de la rigidité de la poutre identifiée est très proche de celle de la poutre réelle avec une erreur de l'ordre de 0,5 % pour la poutre choisie. Les rigidités identifiées sont très proches des rigidités de la poutre réelle.

On a aussi relevé des écarts entre les déformées de la poutre réelle et celle identifiées par la méthode.

Le plus faible écart est enregistré sur le modèle à 6 tronçons, avec un découpage très proche de la poutre réelle.

CONCLUSION

Il ressort de la formulation du problème qu'une nouvelle méthode d'identification se dégage avec deux options : l'identification globale et l'identification locale (champs à courbure non nulle par segment) toutes deux reposant sur le choix de champs mieux adaptés à la résolution du système. La prise en compte du cisaillement dans le programme apporterait un plus dans l'optimisation des structures complexes à inertie évolutive.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. DELLUS P., 1976.- Résistance des matériaux. Edition technique et vulgarisation, Paris.
2. DYM et SHAMS, 1973.- Solid mechanics, a variational approach. Mac Graw-Hill, International Student Edition, New York.
3. TOUKOURI Chakirou A., 1991.- Méthode d'identification des rigidités de flexion de poutre à inertie évolutive. Thèse de doctorat Université de Claude Bernard Lyon 1.
4. GREDIAC M., TOUKOUROU and VAUTRIN A., 1992.- Inverse Problem in Mechanics of Structures : a New Approach Based on Displacement Field Processing. International Union of Theoretical and applied Mechanics, M. Tanaka, H. Bui (Eds) Inverse Problems in Engineering Mechanics, pp. : 147 - 157.